Boundary Field Problems and Computer Simulation
doi: 10.7250/bfpcs.2017.005
2017 / 56

Another Approach for Solving a System of Linear Equations

Cita veida iteratīva metode lineāru vienādojumu sistēmu risināšanai

Jurijs Lavendels
Rīgas Tehniskā universitāte, Latvija

***Kopsavilkums* – Lineārās vienādojumu sistēmas ir klasiska skaitlisko metožu sadaļa, kas bija zināma jau pirms mūsu ēras, sasniedza uzplaukumu 1600–1700 gados, sakarā ar sabiedrības pasūtījumu tehnisko un būvniecības uzdevumu risinājumiem, bet nav zaudējusi aktualitāti arī mūsdienās. Dotajā rakstā piedāvāta vēl viena iteratīva pieeja lineāro sistēmu risināšanā, kas sakņojas risinājuma tuvinājuma punkta daudzkārtējā pārvietošanā risinājuma virzienā, vienlaicīgi samazinot visu sistēmas vienādojumu nesaites.**

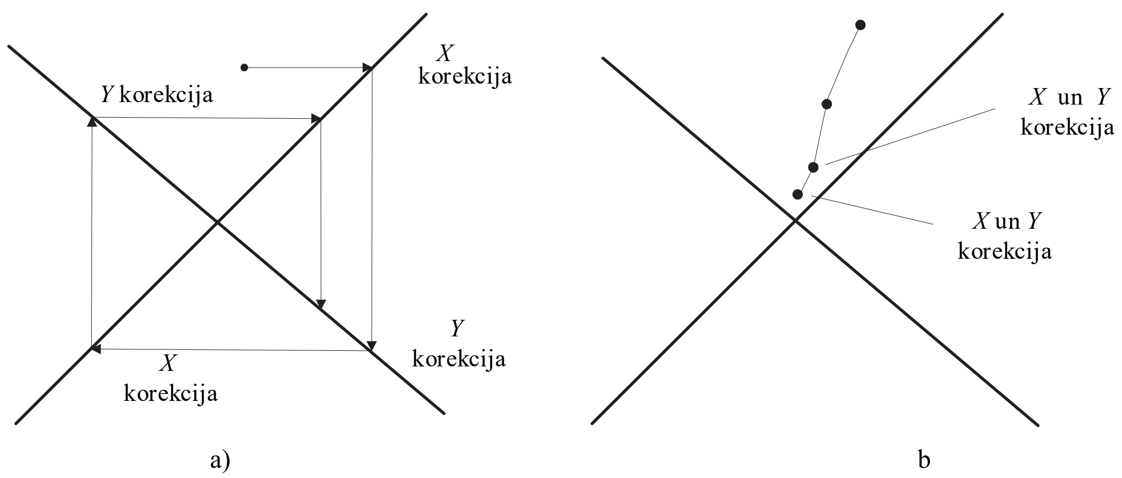
***Atslēgas vārdi* – Iteratīvā pieeja lineārām vienādojumu sistēmām, lineāro vienādojumu sistēmu skaitliskās risināšanas metodes, pieļaujamās vienādojumu sistēmas matricas īpašības, vienādojumu nesaites mazināšana kā risinājuma procesa pamats.**

I. Ievads

Jauns pieprasījums pēc jauniem līdzekļiem lineāro vienādojumu sistēmu (LVS) risināšanā radās kopā ar skaitļošanas tehnikas parādīšanos, strauji attīstoties skaitliskām metodēm fizikālo procesu modelēšanai, pielietojot aprēķinu apgabala diskretizāciju (sadalīšanu apakšapgabalos) un diferenciālo darbību aizstāšanu tuvināti ar algebriskām. Atbilstoši galīgo diferenču, galīgo elementu un to modifikāciju prasībām tika izstrādātas metodes vāji aizpildītu diagonālmatricu ar izteiktu galveno diagonāli risināšanai ar tiešām un iteratīvām metodēm [1], [2].

Tika izstrādātas metodes LVS efektīvai glabāšanai, ņemot vērā matricas simetriju pret galveno diagonāli gan tiešām, gan iteratīvām metodēm. Pēdējos gados, ieviešoties jaunām skaitliskām metodēm (superelementi, robeželementu metode) parādās nepieciešamība risināt LVS ar pilnīgi aizpildītu matricu, ar matricu, kurai nav galvenās diagonāles dominantes [3]. Šādu uzdevumu risināšanai bieži pielieto iteratīvas metodes, kas ir attīstītas no Gausa-Zeideļa metodes [4], [5]. LVS risināšana ar iteratīvām metodēm (piemēram, Gausa-Zeideļa metode) katrā solī paredz viena meklējamā nezināmā korekciju (skat. 1. a att.), samazinot viena atsevišķa vienādojuma nesaiti, pie tam pārējie vienādojumi šajā procesā netiek izmantoti [5]. Lai paātrinātu iteratīvā procesa konverģenci metodes tiek papildinātas ar relaksācijas principiem, kas optimizē mainīgo izmaiņas ātrumu iteratīvā procesā.

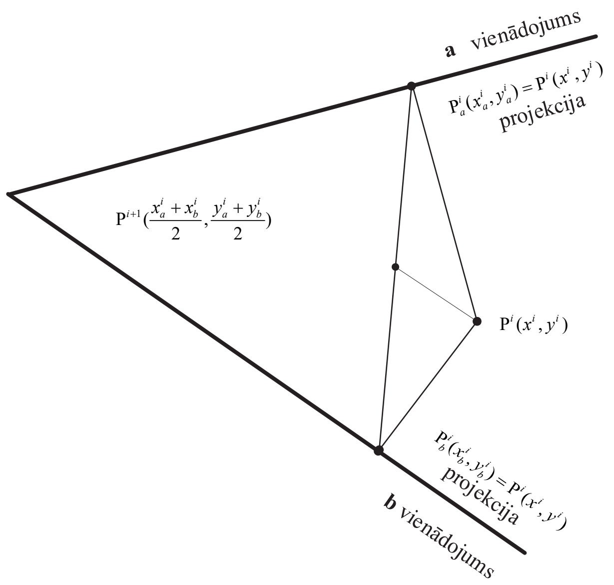
Rakstā piedāvātā pieeja sakņojas principā vienlaicīgi katrā iterācijā samazināt visu LVS nesaites, izmainot visu sistēmas nezināmo vērtības (skat. 1. b att.). Galvenais jautājums ir, kā organizēt iteratīvo procesu, kas koriģējot nezināmos, vienlaicīgi samazina visu vienādojumu nesaites. Vispirms apskatīsim risinājumu divu vienādojumu sistēmai, tad to vispārināsim jebkuram galīgam dimensiju skaitam.



1. att. Viena un visu nezināmo korekcija vienādojumu sistēmas iteratīvā risināšanas procesā.

II. Metodes būtība divu vienādojumu sistēmai

Tiek brīvi pieņemts risinājuma sākuma tuvinājums $P^0(x, y)$. Var viegli parādīt, ka jebkurš punkts $P(x, y)$ XY plaknē atrodas tālāk no vienādojumu sistēmas risinājuma kā $P(x, y)$ projekcijas uz vienādojumiem (2. att.). No teiktā seko, ka vienādojumu sistēmas risināšanai var pielietot sekojošu iteratīvu procesu (2. att.):



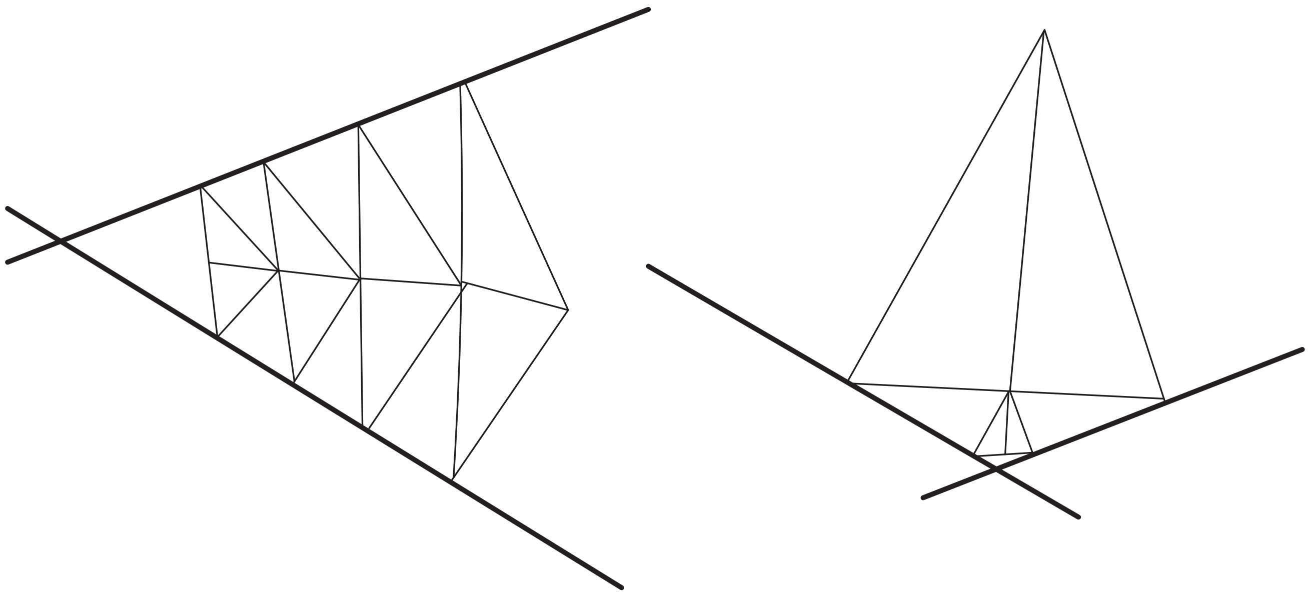
2. att. Kārtējā tuvinājuma noteikšana sistēmas iteratīvā risināšanas procesā.

- tiek atrastas tuvinājuma $P^i(x, y)$ projekcijas uz vienādojumiem;
- par jauno tuvinājumu $P^{i+1}(x^{i+1}, y^{i+1})$ tiek ņemts viduspunkts (vidējais aritmētiskais), starp punkta $P^i(x^i, y^i)$ projekcijām uz sistēmas vienādojumiem a un b;
- tuvinājuma korekcija tiek iteratīvi atkārtota.

Iteratīvas lineāru vienādojumu sistēmas risinājuma gadījumā punkts $P(x, y)$ tiek pārvietots soli pa solim $P^0(x^0, y^0)$, $P^1(x^1, y^1)^1$, $P^2(x^2, y^2)^2$, ..., līdz tiek atrasts stāvoklis, kad risinājuma tuvinājums ir pietiekami tuvs lineāru vienādojumu sistēmas risinājumam $R(x, y)$. Tā kā risinājums $R(x, y)$ tiek meklēts, tad tuvinājuma kvalitāti nākas novērtēt, piemēram, ievietojot tuvināto risinājumu vienādojumos un novērtējot nesaiti, konstatējot, ka iteratīvajā procesā tuvinājums vairāk nemainās utt.

Nav grūti pierādīt, ka:

- normālas sistēmas gadījumā, piedāvātais iteratīvais process katrā solī tuvojas atrisinājumam;
- iterāciju rezultātā atrisinājuma tuvinājums nemainīs apgabalu, kurā notiek sistēmas risināšana;
- iterāciju procesa konverģēšanas ātrums ir atkarīgs no vienādojumu sistēmas īpašībām, divdimensiju gadījumā leņķa kuru veido vienādojumi (3. att.);
- ja vienādojumi ir pretrunīgi (līnijas ir tuvas paralēlām), tad process nekonverģēs un risinājums iegūts netiks;
- atšķirībā no populārām metodēm, pieejai nav stingru prasību vienādojumu sistēmas matricai – nav svarīga galvenās diagonāles dominante;
- katrā iterācijā tiek noteikts pieaugums atrisinājuma tuvinājumam, kuram virziens ir tuvs optimālam, bet garums parasti ir ievērojami mazāks par optimālo, nepieciešams izstrādāt metodes atrisinājuma tuvinājuma pieauguma koriģēšanai.



3. att. Iteratīvā procesa ātruma atkarība no risinājuma sākuma punkta izvēles.

III. Pieeja lielāku sistēmu gadījumiem

Apskatīto pieeju viegli pielietot jebkuram galīgam vienādojumu skaitam.

Tā divdimensiju gadījumā ģeometriski vienādojums ir taisne, bet nepretrunīga vienādojumu sistēma ir divas taisnes, kas krustojas, šādi veidojot 4 leņķus. Iteratīvais risinājuma process notiek tikai vienā leņķī.

Trīsdimensiju gadījumā, viens vienādojums ģeometriski ir plakne, nepretrunīga vienādojumu sistēma ir trīs plaknes, kas visas savstarpēji krustojas. Iteratīvais risinājuma process notiek piramīdas iekšienē, kuras virsmu veido trīs plakņu vienādojumi, tiek meklēta piramīdas virsotne. Ir astoņas piramīdas, kur tikai vienā no piramīdām notiek risinājums.

Vairāk dimensiju gadījumā vienādojums ir n-dimensiju hiperplakne, kur n ir vienādojumu sistēmas kārta. Nepretrunīga vienādojumu sistēma ir n hiperplakņu kopa, kas visas savstarpēji krustojas. Iteratīvais risinājuma process notiek hiperpiramīdas iekšienē, kuras hipervirsmu veido n hiperplakņu vienādojumi, tiek meklēta piramīdas virsotne. Četru un vairāk dimensiju gadījumā pētāmo objektu grafiski iedomāties nav iespējams, bet saglabājas visas matemātiskās pieejas un formulas.

Jebkura dimensiju skaita gadījumā punkta $P(p_1, p_2, ..., p_n)$, projekcijas koordinātes uz hiperplakni:

$$a_1 \cdot x_1 + a_2 \cdot x_2 + \ldots + x_n \cdot b = 0 \qquad (1)$$

var aprēķināt [6] sekojoši. Plaknes normālvektors $n = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ ir perpendikulārs plaknei, līdz ar to ir virzienvektors taisnei, kas ir tuvākais attālums no punkta $P(p_1, p_2, ..., p_n)$ līdz plaknei, t.i., līdz punkta projekcijai plaknē. Taisnes kanoniskajos vienādojumos ievietojam punkta $P(p_1, p_2, ..., p_n)$ koordinātes:

$$(x_1 - p_1) / a_1 = (x_2 - p_2) / a_2 = \ldots = (x_n - p_n) / a_n. \qquad (2)$$

- taisnes vienādojumu izsaka parametriskā formā

$$\begin{aligned} &(x_1 - p_1) / a_1 = t \text{ jeb } x_1 = a_1 \cdot t + p_1; \qquad (3)\\ &(x_2 - p_2) / a_2 = t \text{ jeb } x_2 = a_2 \cdot t + p_2;\\ &\ldots\\ &(x_n - p_n) / a_n = t \text{ jeb } x_n = a_n \cdot t + p_n. \end{aligned}$$

- ievietojot $x_1, x_2, ..., x_n$ plaknes vienādojumā iegūstam:

$$t = -\frac{a_1 \cdot x_1 + a_2 \cdot x_2 + ... + a_n x_n + b}{a_1 \cdot a_1 + a_2 \cdot a_2 + ... + a_n a_n}; \qquad (4)$$

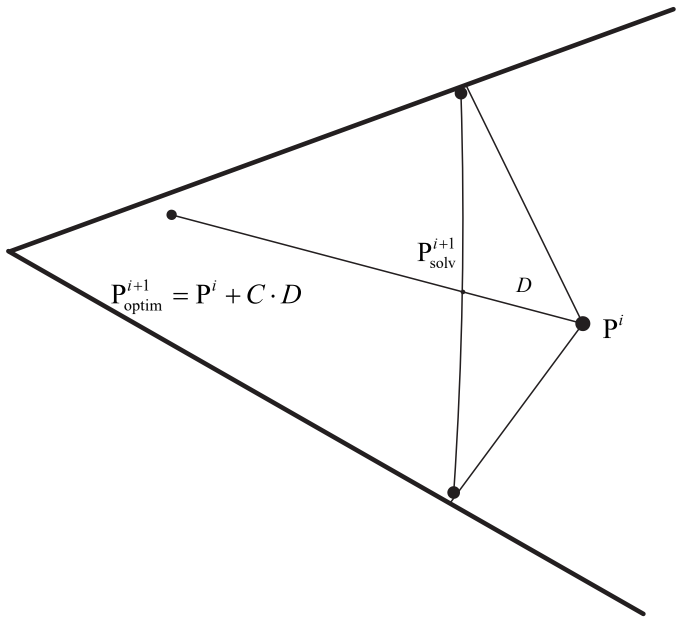
- projekcijas punkta koordinātes būs:

$$\begin{aligned} &P_{1\text{proj}} = a_1 \cdot t + p_1; \qquad (5)\\ &P_{2\text{proj}} = a_2 \cdot t + p_2;\\ &\ldots\\ &P_{n\text{proj}} = a_n \cdot t + p_n. \end{aligned}$$

Jebkura dimensiju skaita gadījumā jaunā tuvinājuma koordinātu vērtība tiek ņemta kā iepriekšējā tuvinājuma projekciju uz hiperplaknēm aritmētiskais vidējais.

IV. Optimāla tuvinājuma pieauguma izvēle iteratīvajā procesā

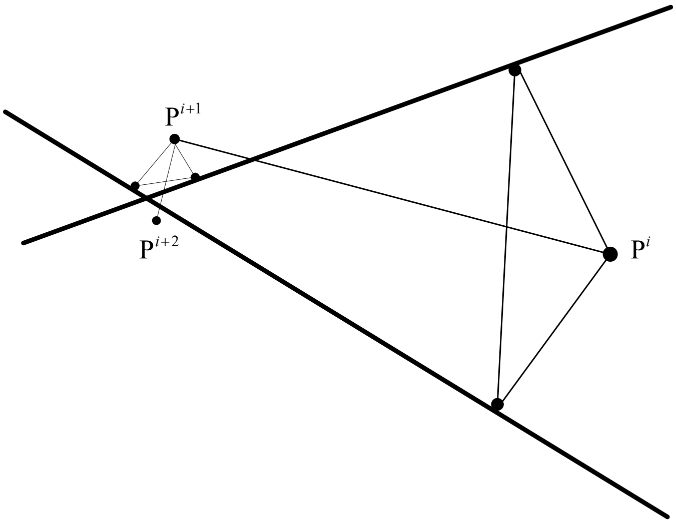
Vienādojumu sistēmas risinājuma tuvinājuma izmaiņa tieši pielietojot iepriekš aprakstīto pieeju lēni konverģē (skat. 3. att.), jo iterācijas solī aprēķinātās tuvinājuma koordinātu pieaugums ir mazāks par optimālo (maksimāli pieļaujamo).



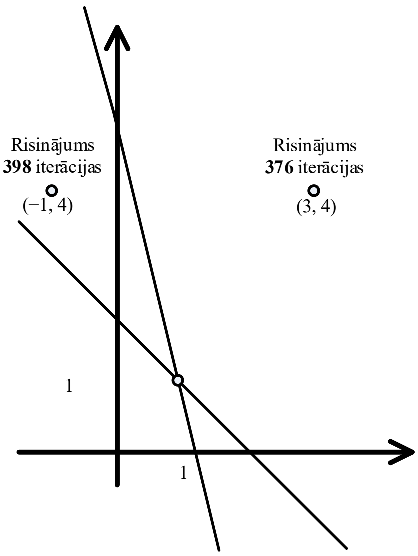
4. att. Maksimāli pieļaujamā soļa izvēle kārtējā iterācijā.

Optimālā risinājuma tuvinājuma pieauguma noteikšana, saglabājot aprēķināto virzienu, ir patstāvīga problēma. Koeficienta C optimālas vērtības noteikšana prasa lielus aprēķinus un katrā solī paredz aprēķināt visu vienādojumu nesaites. Metodika C optimālas vērtības noteikšanai, nepielietojot lielus aprēķinus nav izstrādāta. Koeficientu C var noteikt empīriski, pakāpeniski palielinot C un aprēķinot vienādojumu nesaites, ja kāda vienādojuma nesaite maina zīmi, tad tas nozīmē koeficients jau C pārsniedz pieļaujamo vērtību. Tāpat empīriski noteikts, ka noteiktā C optimālā vērtība var tikt pielietota vairākās iterācijās.

Atzīmēsim, ka palielinot soli var iegūt vēl vienu veidu vienādojumu sistēmas risināšanā (5. att.). Galvenā risinājuma ideja ir P^iP^{i+1} īpašība aptuveni norādīt virzienu uz sistēmas atrisinājumu. Līdz ar to katrā iterācijā notiek virzīšanās uz atrisinājumu, iespējams tam, pārlecot pāri.



5. att. Risinājuma paātrināšana, lietojot lielu soli.



6. att. Iterāciju skaita atkarība no sākuma tuvinājuma izvēles.

Gadījumā ja kārtējā iterācija pārlec pāri risinājumam, vienalga turpinās risināšanas process citā segmentā (5. att.). Praktiskai šāda paātrināta algoritma realizācijai ir nepieciešami papildus pētījumi kārtējā soļa izvēlē.

V. Dažu praktisku eksperimentu rezultāti

Metodes idejas tika praktiski pārbaudītas vienkāršā prototipa programmā, kas risina vienādojumu sistēmu līdz 4 vienādojumiem, visi risinājumi tika veikti ar septiņiem zīmīgiem cipariem. Risinot divu vienādojumu sistēmu, tika konstatēts, ka sākuma tuvinājums mazāk, kā tika sagaidīts, ietekmē iterāciju skaitu risināšanas procesā (skat. 6. att.).

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} x1 \\ x2 \\ x3 \\ x4 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -2 \\ -6 \\ -4 \\ -2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}. \qquad (6)$$

Tā atrisinājums ir $X = \{1\ 0\ 1\ 1\}$. Pie sākuma tuvinājuma $X = \{11\ 11\ 11\ 11\}$, atrisinājums tika iegūts 2000 iterācijās.

Ar sākuma tuvinājumu $X = \{4350\ 2222\ 2222\ 2222\}$, atrisinājums tika iegūts 4350 iterācijās.

Ar sākuma tuvinājumu $X = \{5\ {-10000}\ 10000000000\ 0\}$, atrisinājums tika iegūts 9200 iterācijās.

Ar sākuma tuvinājumu $X = \{0\ 10000000000\ {-10000}\ 5\}$, atrisinājums tika iegūts 8250 iterācijās. Arī citos eksperimentos ir iegūti sagaidāmie rezultāti.

Tika risināta vienādojumu sistēma (6), kuras diagonāles elementi ir 0.

VI. Secinājumi

Ir piedāvāta vēl viena iteratīva pieeja lineāru vienādojumu sistēmu risināšanai, kas sakņojas vienlaicīgā visu vienādojumu nesaišu minimizēšanā. Dotā pieeja praktiski neuzliek nekādas prasības vienādojumu sistēmai. Veikta metodikas aprobācija, kas pierāda metodes darba spējīgumu, taču metodes realizācija katrā iterācijā prasa vērā ņemamus izskaitļojumus. Izskaitļojumu apjoma samazināšana ir atsevišķs pētījums.

Ir iegūti interesanti rezultāti, bet darbs vēl jāturpina, pieeju attīstot un pilnveidojot.

Literatūras saraksts

[1] B. Demidovich and I. Maron, *The Basics of Numerical Methods*, (in russian). Moscow: Nauka, 1970.

[2] I. Bronschtein and K. Semendjajev, *Mathematical Manual for Engineers and Students*, (in russian). Moscow: Nauka, 1981.

[3] M. Kryshchuk and J. Lavendels, "Iterative Method for Solving a System of Linear Equations," *Procedia Computer Science*, vol. 104, pp. 133–137, 2017. https://doi.org/10.1016/j.procs.2017.01.085

[4] A. Heck, *Introduction to MAPLE*. New-York: Springer-Verlag, Inc., 1996.

[5] M. Trott, The Mathematica GuideBook for Numerics, New-York: Springer-Verlag, Inc., 1208 pp, 2006. https://doi.org/10.1007/0-387-28814-7

[6] "Studiju kursa "Augstākā matemātika – 1. semestris" e-studiju vietne," [Online]. Available: https://estudijas.rtu.lv/course/view.php?id=38111

Jurijs Lavendels. Riga Technical University, Kaļķu Street 1, Riga, LV-1658, Latvia, professor, Dr.sc.ing., His current research interests include computation methods with discretization and algebraization for design and modelling physical processes.
E-mail: Jurijs.Lavendelsl@.rtu.lv

Another Approach for Solving a System of Linear Equations

Jurijs Lavendels
Riga Technical University, Latvia

The paper proposes an iterative approach for linear system solving, rooted in the approximation solution point multiple displacement to the direction of the final solution, simultaneously reducing the entire residual of equations system.

Keywords **– Systems of linear equations (SLE), direct and iterative methods for solving the SLE, matrix of SLE**