

# The Solution of the Heat Conduction Equation in 3D Anisotropic Environment and Possibilities of its Improvement

## Siltumvadīšanas uzdevuma risinājums anizotropā 3D vidē un tā pilnveidošanas iespējas

Maksims Žigunovs<sup>1</sup>, Ilmārs Iltiņš<sup>2</sup>, Michael A. Radin<sup>3</sup>

<sup>1,2</sup>Rīgas Tehniskā universitāte, Latvija

<sup>3</sup>Ročestera Tehnoloģiju institūts, ASV

**Kopsavilkums** – Šajā rakstā ir parādīta siltumvadīšanas uzdevuma risinājuma izveide, kas nodrošina paralēlo datu apstrādi, un dots risinājuma uzlabojums, kas samazina aprēķina laiku. Tiek apskatīts, kā dabūtas risinājuma formulas, un tiek aprakstītas datu paralēlās apstrādes iespējas. Galvenais mērķis ir samazināt siltumvadīšanas uzdevuma risinājuma laiku, paralelizējot aprēķinu procesu un sadalot to starp vairākiem datoriem. Galvenais algoritmiskais panākums no padarītā darba ir siltumvadīšanas uzdevuma pārveidošana par aizklātu diferencu shēmu ar trīs diagonālu matricu. Vienādojumu sistēmas ar šāda veida matricu ir iespējams rēķināt, izmantojot Tomasa algoritmu, kurš ir ievērojami efektīvāks par citiem sistēmu risināšanas paņēmieniem.

**Atslēgas vārdi** – Paātrinājums, paralēlās datu apstrādes tehnoloģijas lietojums, robežnosacījumi, siltuma pārnese.

### I. IEVADS

Mūsdienās resursu, laika, naudas utt. ekonomēšanai arvien vairāk un arvien pamatotākā līmenī tiek lietoti algoritmi/datorprogrammas, kas palīdz veikt prognozi par dažādām ietekmēm uz objektiem. Viena no šādām ietekmēm ir temperatūras ietekme uz objektu un temperatūras iekšējā izplatīšanās objekta ietvaros. Mūsdienās pastāv dažādas metodes, kas ļauj veikt temperatūras izplatīšanās aprēķinus. Šāda veida metožu piemēri ir sastopamie *COMSOL* (datorprogramma) tipa risinājumos.

Mūsdienās strauji attīstās paralēlo aprēķinu tehnoloģijas, kuras ļauj paralēli (vienlaicīgi) izpildīt vairākas darbietilpīgas komandas.

Tehnoloģiskā ziņā ir pieejamas lielas skaitļošanas jaudas, kas ir saistītas gan ar secīgiem, gan paralēliem aprēķiniem. Moderno CPU (centrālais procesors) frekvences sasniedz 4 GHz, GPU (grafiskais procesors) kartēm grafisko procesoru skaits sasniedz 1000 vienības vienā kartē, un katra procesora frekvence sasniedz 1 GHz. Tas nozīmē, ka ir iespējams izveidot datorsistēmu, kas ir paredzēta nestacionāru fizikālu parādību modelēšanai trīsdimensiju telpā.

Aktuāli ir spēt prognozēt temperatūras sadalījumu būvēs un tehnoloģiskos objektos atkarībā no mainīgiem sākuma noteikumiem un ārējiem faktoriem.

To ir iespējams izdarīt, apvienojot diferencu shēmu izstrādi nestacionāriem siltuma vadīšanas uzdevumiem anizotropā 3D vidē un paralēlo aprēķinu tehnoloģijas.

Šajā publikācijā ir aprakstīta mūsu izstrādātā metode diferencu shēmu realizācijā paralēlo aprēķinu tehnoloģijās nestacionāriem siltuma vadīšanas uzdevumiem anizotropā 3D vidē.

Ieguvums un lietojums šim darbam:

- 1) diferencu shēmu realizācija ir tiešā veidā saistīta ar paralēlo aprēķinu tehnoloģiju;
- 2) tiek veidota monotona, konservatīva diferencu shēma;
- 3) tiek nodrošināta iespēja aprēķinos izmantot materiālu un telpisko objektu reālās siltumfizikālās īpašības;
- 4) tiek iegūti siltuma izplatīšanās 3D un 2D (viena plakne no 3D) skati;
- 5) lietojot paralēlo aprēķinu tehnoloģijas, tiks paātrināti aprēķini.
- 6) lietojot darba rezultātus, būs iespējams ēku un tehnoloģisko objektu projektētājiem veikt siltuma izplatīšanās aprēķinus un secināt, kādi materiāli jāizmanto, lai sasniegtu nepieciešamo siltuma pārnesei.

### II. MATEMĀTISKĀ MODEĻA IZSTRĀDE

Siltumvadīšanas vienādojums anizotropā 3D apgabalā [1]:

$$\begin{aligned} \frac{Q_p}{nR_r} = & \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{v_x}{R_r} \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{v_y}{R_r} \frac{\partial T}{\partial y} + \frac{v_z}{R_r} \frac{\partial T}{\partial z} \\ & - \frac{1}{R_r} \frac{\partial}{\partial x} \left( \Lambda_{xx} \frac{\partial T}{\partial x} + \Lambda_{xy} \frac{\partial T}{\partial y} + \Lambda_{xz} \frac{\partial T}{\partial z} \right) \\ & - \frac{1}{R_r} \frac{\partial}{\partial y} \left( \Lambda_{yx} \frac{\partial T}{\partial x} + \Lambda_{yy} \frac{\partial T}{\partial y} + \Lambda_{yz} \frac{\partial T}{\partial z} \right) \\ & - \frac{1}{R_r} \frac{\partial}{\partial z} \left( \Lambda_{zx} \frac{\partial T}{\partial x} + \Lambda_{zy} \frac{\partial T}{\partial y} + \Lambda_{zz} \frac{\partial T}{\partial z} \right), t > 0 \end{aligned} \quad (1)$$

Darbā tiek izmantoti trīs veida robežu nosacījumi.

Galvenā problēma diferencu shēmas realizācijā ir saistīta ar siltuma pārnese tenzoru.

Termodispersijas tenzors tiek pārrakstīts eksponenciālā veidā, saglabājot sasaisti starp koordinātu asīm. Tas padarīja risinājumu ļoti jūtīgu attiecībā pret ieejas datu izmaiņām un sākuma nosacījumiem.

Siltuma izplatīšanās diferencu shēma 3D gadījumam tiek izveidota, vispirms vienādojumu (1) pārrakstot:

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial t} + V_x \frac{\partial T}{\partial x} + V_y \frac{\partial T}{\partial y} + V_z \frac{\partial T}{\partial z} = \frac{1}{R_T} \frac{\partial}{\partial x} \left( \Lambda_{xx} \frac{\partial T}{\partial x} + \Lambda_{xy} \frac{\partial T}{\partial y} + \right. \\ \left. + \Lambda_{xz} \frac{\partial T}{\partial z} \right) + \frac{1}{R_T} \frac{\partial}{\partial y} \left( \Lambda_{yx} \frac{\partial T}{\partial x} + \Lambda_{yy} \frac{\partial T}{\partial y} + \Lambda_{yz} \frac{\partial T}{\partial z} \right) + \\ \left. + \frac{1}{R_T} \frac{\partial}{\partial z} \left( \Lambda_{zx} \frac{\partial T}{\partial x} + \Lambda_{zy} \frac{\partial T}{\partial y} + \Lambda_{zz} \frac{\partial T}{\partial z} \right), \right) \end{aligned} \quad (2)$$

kur  $T$  – temperatūra;  $t$  – laiks;  $x$ ,  $y$  un  $z$  ir telpiskās koordinātas;  $V_x$ ,  $V_y$ ,  $V_z$  - siltuma avotu elementu masas pārnese ātrums attiecīgi  $x$ ,  $y$  un  $z$  virzienā;  $R_T$  – siltuma saglabāšanās faktors;  $\Lambda_{12}$  - siltuma vadīšanas tenzors, kur 1 ir aprēķināmais virziens un 2 ir apakš virziens virzienā 1.

Diskretizējot vienādojumu (2), tiek izveidota diferencu shēma temperatūras aprēķināšanai laika momentā  $l+1$ , zinot temperatūras sadalījumu laika momentā  $l$ :

$$\begin{aligned} \frac{T_{ijk}^{l+1} - T_{ijk}^l}{\tau} = \frac{1}{R_T} \frac{\partial}{\partial x} \left( (I_x)_{i+\frac{1}{2}jk} - (I_x)_{i-\frac{1}{2}jk} \right)_{x=x^*, y=y^*, z=z^*} + \\ + \frac{1}{R_T} \frac{\partial}{\partial y} \left( (I_y)_{ij+\frac{1}{2}k} - (I_y)_{ij-\frac{1}{2}k} \right)_{x=x^*, y=y^*, z=z^*} + \\ + \frac{1}{R_T} \frac{\partial}{\partial z} \left( (I_z)_{ijk+\frac{1}{2}} - (I_z)_{ijk-\frac{1}{2}} \right)_{x=x^*, y=y^*, z=z^*} + \frac{QT_{ijk}}{nR_T}, \end{aligned} \quad (3)$$

kur  $\tau$  – laika solis;  $l$ ,  $l+1$  – iterāciju numuri;  $i$  – diskretā pozīcija pa  $x$ ;  $j$  – diskretā pozīcija pa  $y$ ;  $k$  – diskretā pozīcija pa  $z$ ;  $Q$  – temperatūras pieaugums esošajā laika solī punktā  $(i; j; k)$  [2];  $T_{ijk}$  – temperatūra esošajā laika solī punktā  $(i; j; k)$ ;  $n$  – materiāla porozitātes koeficients;  $x^* = (x_i - x_{i-1})/2$ ;  $y^* = (y_j - y_{j-1})/2$ ;  $z^* = (z_k - z_{k-1})/2$ .

Vidējās siltuma plūsmas  $x$ ,  $y$  un  $z$  asu virzienā tiek izteiktas šādi:

$$(I_x)_{i+\frac{1}{2}jk} = \Lambda_{xx} \frac{\exp\left(\rho_{i+\frac{1}{2}jk}\right) T_{i+1jk} - T_{ijk}}{\frac{1}{\rho_{i+\frac{1}{2}jk}} \left( \exp\left(\rho_{i+\frac{1}{2}jk} h_x\right) - 1 \right)}; \quad (4)$$

$$(I_x)_{i-\frac{1}{2}jk} = \Lambda_{xx} \frac{\exp\left(\rho_{i-\frac{1}{2}jk}\right) T_{ijk} - T_{i-1jk}}{\frac{1}{\rho_{i-\frac{1}{2}jk}} \left( \exp\left(\rho_{i-\frac{1}{2}jk} h_x\right) - 1 \right)}; \quad (5)$$

$$(I_y)_{ij+\frac{1}{2}k} = \Lambda_{yy} \frac{\exp\left(\rho_{ij+\frac{1}{2}k}\right) T_{ij+1k} - T_{ijk}}{\frac{1}{\rho_{ij+\frac{1}{2}k}} \left( \exp\left(\rho_{ij+\frac{1}{2}k} h_y\right) - 1 \right)}; \quad (6)$$

$$(I_y)_{ij-\frac{1}{2}k} = \Lambda_{yy} \frac{\exp\left(\rho_{ij-\frac{1}{2}k}\right) T_{ijk} - T_{ij-1k}}{\frac{1}{\rho_{ij-\frac{1}{2}k}} \left( \exp\left(\rho_{ij-\frac{1}{2}k} h_y\right) - 1 \right)}; \quad (7)$$

$$(I_z)_{ijk+\frac{1}{2}} = \Lambda_{zz} \frac{\exp\left(\rho_{ijk+\frac{1}{2}}\right) T_{ijk+1} - T_{ijk}}{\frac{1}{\rho_{ijk+\frac{1}{2}}} \left( \exp\left(\rho_{ijk+\frac{1}{2}} h_z\right) - 1 \right)}; \quad (8)$$

$$(I_z)_{ijk-\frac{1}{2}} = \Lambda_{zz} \frac{\exp\left(\rho_{ijk-\frac{1}{2}}\right) T_{ijk} - T_{ijk-1}}{\frac{1}{\rho_{ijk-\frac{1}{2}}} \left( \exp\left(\rho_{ijk-\frac{1}{2}} h_z\right) - 1 \right)}; \quad (9)$$

$$\rho_{i+\frac{1}{2}jk} = \frac{1}{T_{i+1jk} \Lambda_{xx}} \left( \Lambda_{xy} \frac{T_{ij+1k} - T_{ijk}}{h_y} + \Lambda_{xz} \frac{T_{ijk+1} - T_{ijk}}{h_z} - V_x T_{i+\frac{1}{2}jk} \right); \quad (10)$$

$$\rho_{i-\frac{1}{2}jk} = \frac{1}{T_{i-1jk} \Lambda_{xx}} \left( \Lambda_{xy} \frac{T_{ijk} - T_{ij-1k}}{h_y} + \Lambda_{xz} \frac{T_{ijk} - T_{ijk-1}}{h_z} - V_x T_{i-\frac{1}{2}jk} \right); \quad (11)$$

$$\rho_{ij+\frac{1}{2}k} = \frac{1}{T_{ij+1k} \Lambda_{yy}} \left( \Lambda_{yx} \frac{T_{i+1jk} - T_{ijk}}{h_x} + \Lambda_{yz} \frac{T_{ijk+1} - T_{ijk}}{h_z} - V_y T_{ij+\frac{1}{2}k} \right); \quad (12)$$

$$\rho_{ij-\frac{1}{2}k} = \frac{1}{T_{ij-1k} \Lambda_{yy}} \left( \Lambda_{yx} \frac{T_{ijk} - T_{i-1jk}}{h_x} + \Lambda_{yz} \frac{T_{ijk} - T_{ijk-1}}{h_z} - V_y T_{ij-\frac{1}{2}k} \right); \quad (13)$$

$$\rho_{ijk+\frac{1}{2}} = \frac{1}{T_{ijk+1} \Lambda_{zz}} \left( \Lambda_{zx} \frac{T_{i+1jk} - T_{ijk}}{h_x} + \Lambda_{zy} \frac{T_{ij+1k} - T_{ijk}}{h_y} - V_z T_{ijk+\frac{1}{2}} \right); \quad (14)$$

$$\rho_{ijk-\frac{1}{2}} = \frac{1}{T_{ijk-1} \Lambda_{zz}} \left( \Lambda_{zx} \frac{T_{ijk} - T_{i-1jk}}{h_x} + \Lambda_{zy} \frac{T_{ijk} - T_{ij-1k}}{h_y} - V_z T_{ijk-\frac{1}{2}} \right). \quad (15)$$

$(I_x)_{i+1/2jk}$  tiek rēķināts šādā veidā (līdzīgi tiek rēķināti citu virzienu koeficienti):

$$(I_x)_{i+\frac{1}{2}jk} = \frac{1}{\Lambda_{xx}} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \exp\left( \int_{x_0}^x \frac{\Lambda_{xy} \frac{\partial T}{\partial y} + \Lambda_{xz} \frac{\partial T}{\partial z} - V_x T}{T \Lambda_{xx}} dx \right) dx \quad (16)$$

$$= \phi_{i+1jk} - \phi_{ijk};$$

$$(I_x)_{i+\frac{1}{2}jk} = \frac{\phi_{i+1jk} - \phi_{ijk}}{\frac{1}{\Lambda_{xx}} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \exp\left( \int_{x_0}^x \frac{\Lambda_{xy} \frac{\partial T}{\partial y} + \Lambda_{xz} \frac{\partial T}{\partial z} - V_x T}{T \Lambda_{xx}} dx \right) dx} \quad (17)$$

$$(I_x)_{i+\frac{1}{2}jk} = \frac{T_{i+1,jk} \exp \left( \int_{x_0}^{x_{i+1}} \frac{\Lambda_{xy} \frac{\partial T}{\partial y} + \Lambda_{xz} \frac{\partial T}{\partial z} - V_x T}{T \Lambda_{xx}} dx \right) - T_{ijk}}{\frac{1}{\Lambda_{xx}} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \exp \left( \int_{x_0}^x \frac{\Lambda_{xy} \frac{\partial T}{\partial y} + \Lambda_{xz} \frac{\partial T}{\partial z} - V_x T}{T \Lambda_{xx}} dx \right) dx}; \quad (18)$$

$$(I_x)_{i+\frac{1}{2}jk} = \frac{T_{i+1,jk} \exp \left( \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{\Lambda_{xy} \frac{\partial T}{\partial y} + \Lambda_{xz} \frac{\partial T}{\partial z} - V_x T}{T \Lambda_{xx}} dx \right) - T_{ijk}}{\frac{1}{\Lambda_{xx}} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \exp \left( \int_{x_i}^x \frac{\Lambda_{xy} \frac{\partial T}{\partial y} + \Lambda_{xz} \frac{\partial T}{\partial z} - V_x T}{T \Lambda_{xx}} dx \right) dx}; \quad (19)$$

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{\Lambda_{xy} \frac{\partial T}{\partial y} + \Lambda_{xz} \frac{\partial T}{\partial z} - V_x T}{T \Lambda_{xx}} dx =$$

$$= \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{\Lambda_{xy} \frac{T_{ij+1k} - T_{ijk}}{h_y} + \Lambda_{xz} \frac{T_{ijk+1} - T_{ijk}}{h_z} - V_x T_{i+\frac{1}{2}jk}}{T_{i+1,jk} \Lambda_{xx}} dx = \quad (20)$$

$$= \frac{\Lambda_{xy} \frac{T_{ij+1k} - T_{ijk}}{h_y} + \Lambda_{xz} \frac{T_{ijk+1} - T_{ijk}}{h_z} - V_x T_{i+\frac{1}{2}jk}}{T_{i+1,jk} \Lambda_{xx}} (x_{i+1} - x_i);$$

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} \exp \left( \int_{x_i}^x \frac{\Lambda_{xy} \frac{\partial T}{\partial y} + \Lambda_{xz} \frac{\partial T}{\partial z} - V_x T}{T \Lambda_{xx}} dx \right) dx \approx$$

$$\approx \int_{x_i}^{x_{i+1}} \exp \left( \frac{\Lambda_{xy} \frac{T_{ij+1k} - T_{ijk}}{h_y} + \Lambda_{xz} \frac{T_{ijk+1} - T_{ijk}}{h_z} - V_x T_{i+\frac{1}{2}jk}}{T_{i+1,jk} \Lambda_{xx}} (x_i - x) \right) dx =$$

$$= \frac{\exp \left( \frac{\Lambda_{xy} \frac{T_{ij+1k} - T_{ijk}}{h_y} + \Lambda_{xz} \frac{T_{ijk+1} - T_{ijk}}{h_z} - V_x T_{i+\frac{1}{2}jk}}{T_{i+1,jk} \Lambda_{xx}} (x_{i+1} - x_i) \right) - 1}{\frac{\Lambda_{xy} \frac{T_{ij+1k} - T_{ijk}}{h_y} + \Lambda_{xz} \frac{T_{ijk+1} - T_{ijk}}{h_z} - V_x T_{i+\frac{1}{2}jk}}{T_{i+1,jk} \Lambda_{xx}}}. \quad (21)$$

$$\left( \exp \left( \frac{\Lambda_{xy} \frac{T_{ij+1k} - T_{ijk}}{h_y} + \Lambda_{xz} \frac{T_{ijk+1} - T_{ijk}}{h_z} - V_x T_{i+\frac{1}{2}jk}}{T_{i+1,jk} \Lambda_{xx}} (x_{i+1} - x_i) \right) - 1 \right);$$

$$(I_x)_{i+\frac{1}{2}jk} = \Lambda_{xx} \left( \exp \left( \frac{\Lambda_{xy} \frac{T_{ij+1k} - T_{ijk}}{h_y} + \Lambda_{xz} \frac{T_{ijk+1} - T_{ijk}}{h_z} - V_x T_{i+\frac{1}{2}jk}}{T_{i+1,jk} \Lambda_{xx}} (x_{i+1} - x_i) \right) - 1 \right) /$$

$$\left( \frac{1}{\Lambda_{xy} \frac{T_{ij+1k} - T_{ijk}}{h_y} + \Lambda_{xz} \frac{T_{ijk+1} - T_{ijk}}{h_z} - V_x T_{i+\frac{1}{2}jk}} (x_{i+1} - x_i) \right) \cdot$$

$$\left( \exp \left( \frac{\Lambda_{xy} \frac{T_{ij+1k} - T_{ijk}}{h_y} + \Lambda_{xz} \frac{T_{ijk+1} - T_{ijk}}{h_z} - V_x T_{i+\frac{1}{2}jk}}{T_{i+1,jk} \Lambda_{xx}} (x_{i+1} - x_i) h_x \right) - 1 \right). \quad (22)$$

$\Lambda$  definīcija ir šāda:

$$\Lambda_{xx} = \frac{\lambda_{xx}}{n\rho c}, \Lambda_{xy} = \frac{\lambda_{xy}}{n\rho c}, \Lambda_{xz} = \frac{\lambda_{xz}}{n\rho c}; \quad (23)$$

$$\Lambda_{yx} = \frac{\lambda_{yx}}{n\rho c}, \Lambda_{yy} = \frac{\lambda_{yy}}{n\rho c}, \Lambda_{yz} = \frac{\lambda_{yz}}{n\rho c}; \quad (24)$$

$$\Lambda_{zx} = \frac{\lambda_{zx}}{n\rho c}, \Lambda_{zy} = \frac{\lambda_{zy}}{n\rho c}, \Lambda_{zz} = \frac{\lambda_{zz}}{n\rho c}; \quad (25)$$

$$\lambda_{xx} = n\rho c \left( \beta_T V + (\beta_c - \beta_T) \frac{v_x v_x}{V_{xx}} \right); \quad (26)$$

$$\lambda_{xy} = n\rho c \left( \beta_T V + (\beta_c - \beta_T) \frac{v_x v_y}{V_{xy}} \right); \quad (27)$$

$$\lambda_{xz} = n\rho c \left( \beta_T V + (\beta_c - \beta_T) \frac{v_x v_z}{V_{xz}} \right); \quad (28)$$

$$\lambda_{yx} = n\rho c \left( \beta_T V + (\beta_c - \beta_T) \frac{v_y v_x}{V_{yx}} \right); \quad (29)$$

$$\lambda_{yy} = n\rho c \left( \beta_T V + (\beta_c - \beta_T) \frac{v_y v_y}{V_{yy}} \right); \quad (30)$$

$$\lambda_{yz} = n\rho c \left( \beta_T V + (\beta_c - \beta_T) \frac{v_y v_z}{V_{yz}} \right); \quad (31)$$

$$\lambda_{zx} = n\rho c \left( \beta_T V + (\beta_c - \beta_T) \frac{v_z v_x}{V_{zx}} \right); \quad (32)$$

$$\lambda_{zz} = n\rho c \left( \beta_T V + (\beta_c - \beta_T) \frac{v_z v_z}{V_{zz}} \right); \quad (33)$$

kur  $n$  – materiāla porozitātes koeficients;  $\rho$  – ūdens blīvums;  $c$  – ūdens siltuma jauda (tiek pieņemts, ka siltuma avots ir izvietots ūdenī, jo tiek pieņemts, ka ķīmiskās reakcijas ūdenī veido temperatūras pieaugumu [3]);  $\beta_c, \beta_T$  – garenvirziena un šķērsvirziena termiskā dispersija [1], [4];  $V$  – ātruma modulis formulā ieejošo asu virzienos;  $v_x, v_y, v_z$  – ātruma komponentes asu virzienos.

Lai veidotu paralēlos aprēķinus, veicot izveidotās diferencu shēmas aprēķinus, tiek veikta diferencu shēmas dekompozīcija pa distanci un laiku, lietojot *ADI (Alternating Direction Implicit)* pamatprincipus. Rezultātā diferencu shēma siltuma izplatīšanās aprēķiniem no laika momenta  $l$  līdz laika momentam  $l + 1$  tiek pārveidota un sadalīta trijos etapos:

$$\begin{aligned} \frac{T_{ijk}^{l+\frac{1}{3}} - T_{ijk}^l}{\frac{\tau}{3}} &= \frac{QT_{ijk}}{nR_T} + \frac{1}{R_T} \frac{\partial}{\partial x} \left( \left( I_x \right)_{i+\frac{1}{2}jk}^{l+\frac{1}{3}} - \left( I_x \right)_{i-\frac{1}{2}jk}^{l+\frac{1}{3}} \right)_{x=x^*, y=y^*, z=z^*} + \\ &+ \frac{1}{R_T} \frac{\partial}{\partial y} \left( \left( I_y \right)_{ij+\frac{1}{2}k}^l - \left( I_y \right)_{ij-\frac{1}{2}k}^l \right)_{x=x^*, y=y^*, z=z^*} + \\ &+ \frac{1}{R_T} \frac{\partial}{\partial z} \left( \left( I_z \right)_{ijk+\frac{1}{2}}^l - \left( I_z \right)_{ijk-\frac{1}{2}}^l \right)_{x=x^*, y=y^*, z=z^*}; \end{aligned} \quad (34)$$

$$\begin{aligned} \frac{T_{ijk}^{l+\frac{2}{3}} - T_{ijk}^{l+\frac{1}{3}}}{\frac{\tau}{3}} &= \frac{QT_{ijk}}{nR_T} + \frac{1}{R_T} \frac{\partial}{\partial x} \left( \left( I_x \right)_{i+\frac{1}{2}jk}^{l+\frac{2}{3}} - \left( I_x \right)_{i-\frac{1}{2}jk}^{l+\frac{2}{3}} \right)_{x=x^*, y=y^*, z=z^*} + \\ &+ \frac{1}{R_T} \frac{\partial}{\partial y} \left( \left( I_y \right)_{ij+\frac{1}{2}k}^{l+\frac{2}{3}} - \left( I_y \right)_{ij-\frac{1}{2}k}^{l+\frac{2}{3}} \right)_{x=x^*, y=y^*, z=z^*} + \\ &+ \frac{1}{R_T} \frac{\partial}{\partial z} \left( \left( I_z \right)_{ijk+\frac{1}{2}}^{l+\frac{2}{3}} - \left( I_z \right)_{ijk-\frac{1}{2}}^{l+\frac{2}{3}} \right)_{x=x^*, y=y^*, z=z^*}; \end{aligned} \quad (35)$$

$$\begin{aligned} \frac{T_{ijk}^{l+1} - T_{ijk}^{l+\frac{2}{3}}}{\frac{\tau}{3}} &= \frac{QT_{ijk}}{nR_T} + \frac{1}{R_T} \frac{\partial}{\partial x} \left( \left( I_x \right)_{i+\frac{1}{2}jk}^{l+1} - \left( I_x \right)_{i-\frac{1}{2}jk}^{l+1} \right)_{x=x^*, y=y^*, z=z^*} + \\ &+ \frac{1}{R_T} \frac{\partial}{\partial y} \left( \left( I_y \right)_{ij+\frac{1}{2}k}^{l+1} - \left( I_y \right)_{ij-\frac{1}{2}k}^{l+1} \right)_{x=x^*, y=y^*, z=z^*} + \\ &+ \frac{1}{R_T} \frac{\partial}{\partial z} \left( \left( I_z \right)_{ijk+\frac{1}{2}}^{l+1} - \left( I_z \right)_{ijk-\frac{1}{2}}^{l+1} \right)_{x=x^*, y=y^*, z=z^*}. \end{aligned} \quad (36)$$

Formulās (35)–(37) tāpat kā formulā (3) atvasinājumu vērtības tiek rēķinātas punktos  $x^* = (x_i - x_{i-1})/2$ ,  $y^* = (y_j - y_{j-1})/2$ ,  $z^* = (z_k - z_{k-1})/2$ .

*ADI* tehnoloģijas lietojums ļauj veikt aprēķinus ātrāk un ļauj veidot aizklāto diferencu shēmu piecu punktu šablonam divu koordinātu virzienos tā, lai tiktu izveidota vienādojumu sistēma ar trīs diagonāļu matricu, kuras atrisināšanai ir iespējams izmantot Tomasa algoritmu. Līdz ar to aprēķini tiek paātrināti.

Lai padarītu aprēķinu procesu vēl ātrāku, tiek aprēķināti iterāciju laika soļi atkarībā no prognozētiem siltuma izplatīšanās aprēķiniem nākamajā iterācijā. Šādai pieejai ir vairāki soļi:

- 1) aprēķināt absolūto un relatīvo kļūdu starp prognozējamo siltuma izplatīšanās rezultātu un aprēķinu rezultātu;
- 2) atrast maksimālo kļūdas vērtību;
- 3) izrēķināt nākamās iterācijas laika soli pēc algoritma, kas parādīts 1. attēlā;
- 4) veikt siltuma izplatīšanās prognozi nākamajai iterācijai.

```

If [ (ErrorXYZ >= \frac{toltol}{2} ), \tau1 = \tau; \tau = \frac{\tau}{\taukoef}; If [ \tau < \taumin, \tau = \taumin ]; ];
If [ (ErrorXYZ <= \frac{toltol}{2} ) \wedge (ErrorXYZ >= \frac{toltol}{5} ), \tau1 = \tau; \tau = \tau ];
If [ (ErrorXYZ <= \frac{toltol}{5} ), \tau1 = \tau; \tau = \tau * \taukoef; If [ \tau > \taumax, \tau = \taumax ]; ];

```

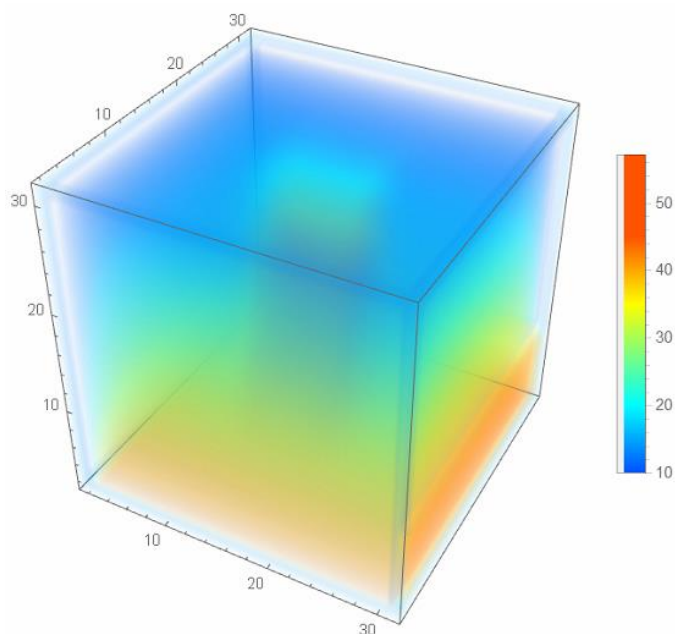
1. att. Nākamās iterācijas laika soļa aprēķina algoritms. *ErrorXYZ* – maksimālā kļūda starp prognozējamo siltuma izplatīšanās rezultātu un aprēķinu rezultātu, *toltol* – uzdots kļūdas līmenis,  $\tau$  – laika solis, *tkoef* – laika soļa izmaiņas koeficients, *min* – minimālais laika solis, *max* – maksimālais laika solis.

Papildus izmantojamais uzlabojums algoritmam ir diferencu shēmas normalizācija pēc attāluma un laika.

Attāluma normalizācija sākas ar apskatāmā 3D apgabala maksimālā izmēra pa koordinātu asīm noteikšanu. Pēc tam visi izmantojamie attāluma soļi un 3D punktu pozīcijas tiek dalītas ar iegūto vērtību. Laika normalizācija tiek lietota laika solim, to dalot ar apskatāmā 3D apgabala maksimālā izmēra vērtību, kāpinātu kvadrātā.

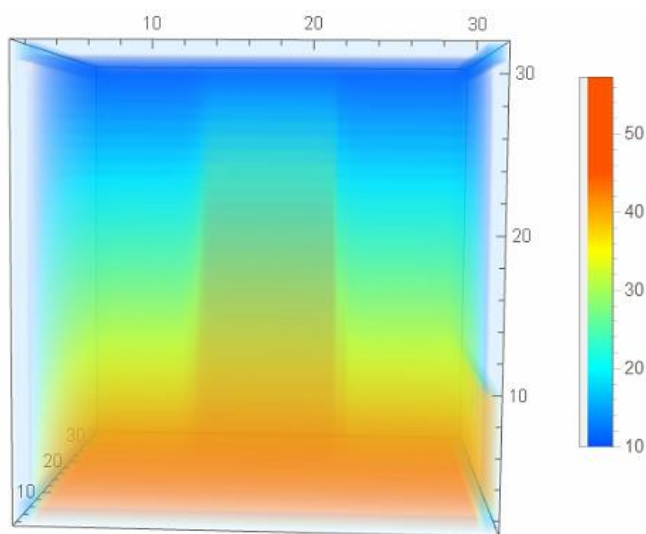
### III. REZULTĀTI

Izveidotā diferencu shēma ir aizklāta, bet tās aprēķinu procesa ātrums ir kontrolējams un paātrināms. Aprēķinu rezultātu piemērs parādīts 2. attēlā.



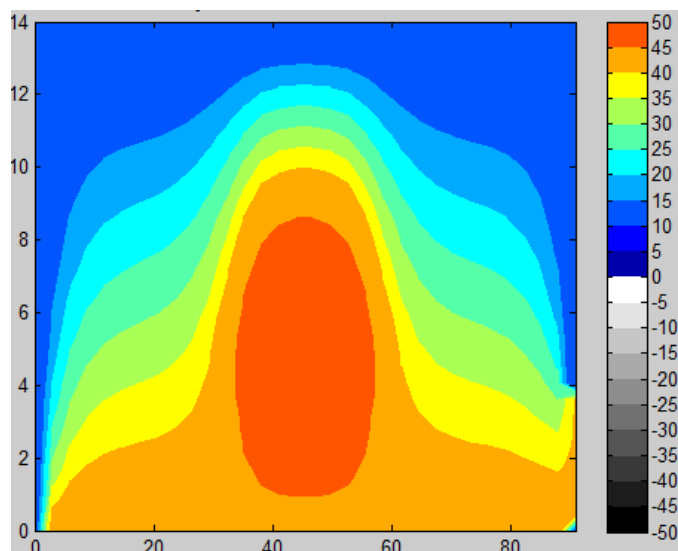
2. att. Aprēķina piemērs. Krāsu skala parāda temperatūru celsija grādos analizējamajā apgabalā. Analizējamā apgabala centrālajā daļā ir siltuma avoti.

2. attēlā parādītie rezultāti no cita skatu punkta ir redzami 3. attēlā.



3. att. Izveidotā risinājuma aprēķinu procesa rezultāts.

3. attēla vertikālā griezumā 2D bilde bez caurspīdīgām zonām tiek parādīta 4. attēlā.



4. att. Aprēķinu rezultāta vertikāls griezumš.

#### IV. SECINĀJUMI

Izstrādāta monotona, konservatīva eksponenciālā diferencu shēma temperatūras izplatīšanās aprēķiniem, lietojot ADI pamatprincipus. Ievērojamākais uzlabojums izveidotai diferencu shēmai ir samazinātais aprēķinu laiks, kas tiek sasniegts, izmantojot algoritma blokus, kas nav savstarpēji saistīti. Tas nozīmē, ka pastāv iespēja veikt paralēli šī algoritma fragmentu aprēķinus. Tas ir ievērojams uzlabojums 3D aprēķiniem.

Izstrādātais risinājums ļauj izmantot dinamisko laika soli aprēķinu procesā.

#### V. LITERATŪRAS SARAKSTS

- [1] R. Sethi and A. D. Molfettav, "Heat Transport Modeling in an Aquifer Downgradient a Municipal Solid Waste Landfill in Italy," *American Journal of Environmental Sciences*, vol. 3, issue 3, pp. 106–110, 2007. <https://doi.org/10.3844/ajessp.2007.106.110>
- [2] H. Yoshida, N. Tanaka, and H. Hozumi, "Theoretical Study on Heat Transport Phenomena in a Sanitary Landfill," in *Proc. of Sixth International Landfill Symposium (SARDINIA '97)*, 13–17 October, 1997, pp. 109–120.
- [3] C. Zheng and P. Wang, "MT3DMS: A Modular Three-Dimensional Multispecies Transport Model for Simulation of Advection, Dispersion and Chemical Reactions of Contaminants in Groundwater Systems," Contract Report SERDP-99-1, 1999.
- [4] M. C. Zanetti, L. Manna, and G. Genon, "Biogas production evaluation by means of thermal balances," in *6th International Landfill Symposium Sardinia 97*, 13–17 October 1997, pp. 523–531.



**Maksims Žigunovs** received Mg. sc. ing. in Information Technologies in 2013. He defended his Master thesis at Liepaja University, Latvia. Since 2016, he has been a Ph.D. student with Riga Technical University. Major areas of his scientific activity are heat transfer implementations, environment process modelling and parallel calculation technologies applied and theoretical usage in software usage/creations.

E-mail: maksims.zigunovs@inbox.lv



**Michael A. Radin** Ph.D., is an Associate Professor of Mathematics, with the Rochester Institute of Technology, Rochester, New York, U.S.A.

His research areas are difference equations, discrete neural networks, modeling human emotions and pedagogy.

He spent sabbatical in Latvia in spring 2016 and has been a lecturer at Liepaja University and Riga Technical University.

E-mail: michael.radin@rit.edu



**Ilmārs Iltiņš** is a Professor with the Department of Engineering Mathematics of Riga Technical University. Major areas of his scientific activity are inverse problems of heat conduction, stability analysis of flows, numerical methods.

E-mail: ilmars.iltins@rtu.lv

### The Solution of the Heat Conduction Equation in 3D Anisotropic Environment and Possibilities of its Improvement

Maksims Žigunovs<sup>1</sup>, Ilmārs Iltiņš<sup>2</sup>, Michael A. Radin<sup>3</sup>

<sup>1,2</sup> Riga Technical University, Latvia, <sup>3</sup> Rochester Institute of Technology, U.S.A

Nowadays there are high speed improvements in processors frequencies and processors amount on a single map. So these opportunities have to be used in such fields as modeling and simulation, prediction models and simulations. One of these fields is strictly connected with the article's subject (heat conduction). Heat conduction calculation in 3D space is quite a problem for 3D space calculations because the time spent on calculation for usual approaches is quite long. It is possible to separate full iteration of heat conduction calculation into several portions. These portions of calculation could contain separate calculation blocks. It is possible to implement using ADI (Alternating Direction Implicit) principles in dividing full iteration of heat conduction calculation into 3 parts. Each of these parts ignores one of the directions of coordinate axes, but allows to calculate only three diagonal matrix using Thomas algorithm. It means that additional effort on difference scheme construction has the payback of calculation time reducing because of separated calculable blocks. Another boost of calculation speed is dynamic time step implementation by taking into account the prediction matrix of next iteration heat transfer calculations. This approach has no strict impact on time step calculations for each next iteration, but it can be bordered between the possible minimal and maximal time step defined values. Provided solutions allow to manage algorithm calculation time by applying as many computers as many times as needed to reduce the calculation time.

**Keywords** – heat conduction, improvement, high performance computing.